ガウシアンによる複数回平滑化の性質

1. はじめに

２次元ガウシアンによる平滑化を行うとき，フィルタサイズが大きいと処理時間が増えてしまうため，フィルタサイズの小さい例えばサイズ３×３のフィルタを複数回掛けることを試みる場合があります．その際，あるサイズのフィルタを１回掛けることと，サイズ３×３のフィルタを複数回掛けることとの関係を調べておく必要があります．

以下では，これらの関係を明らかにし，その上で実装上はどうすればよいのかを述べます．

2. 数学的事実

標準偏差σの２次元ガウシアンカーネルを$G(x,y;\sigma)$とすると，

$$G(x,y;\sigma)=\alpha\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right),\quad \alpha=\frac{1}{2\pi\sigma^2} \tag{1}$$

となります．また，ガウシアン平滑化は画像$I(x,y)$とのたたみ込み（convolution）$G*I(x,y;\sigma)$となります：

$$\begin{aligned}G*I(x,y;\sigma)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(u,v;\sigma)\,I(x-u,y-v)\,dudv\\&\left(=\int G(u,v;\sigma)\,I(x-u,y-v)\,dudv\ \text{と略記します}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

なお，関数 f,g,h に対する以下のたたみ込みの性質は，以降の式展開の際に断りなく用います．

<u>たたみ込みの性質</u>

（１） 線形性：$f*(\alpha g+\beta h)=\alpha(f*g)+\beta(f*h)$ （α,β は任意の定数）

（２） 可換性：$f*g=g*f$

（３） 結合性：$(f*g)*h=f*(g*h)$

さて，以上の準備のもと，ガウシアンをk回（$k\geq 2$）掛けたときの平滑化は次のようになります：

$$\underbrace{G*(G*(\cdots*(G*I)\cdots))}_{k\text{回}}=(\underbrace{G*G*\cdots*G}_{k\text{個}})*I\,. \tag{3}$$

以下k個のガウシアンのたたみ込みを$G^k(x,y;\sigma)(=(G*\cdots*G)(x,y;\sigma))$と書くことにします．するとこのとき，以下の関係が成り立ちます．

$$\boxed{G^k(x,y;\sigma)=G(x,y;\sqrt{k}\sigma)}\quad (k\geq 2) \tag{4}$$

この式(4)が，複数回ガウシアンを掛けたときの性質となります．すなわち，標準偏差σのガウシアンによるk回の平滑化は，標準偏差$\sqrt{k}\sigma$のガウシアンによる１回の平滑化と等価であることを意味しています．

式(4)の証明は第４章にまわして，先に実装に関して考察します．

3. 実装上の考察（OpenCV に沿って）

OpenCV では，フィルタサイズ$(2N+1)\times(2N+1)$のガウシアンのσ値（$\sigma(N)$）を以下の式によっ