幾何計算（2次元・3次元）の計算公式

(Ver.1.2)

2013 年 10 月

株式会社 アイディール

目次

２次元幾何計算および３次元幾何計算に用いられている計算公式を以下に示します．なお，以下の記号は断りなく用います．

n 次元ベクトル $\mathbf{u}=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathsf{T}}$， $\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathsf{T}}$ （Ｔ は転置を表す）に対して，

- 内積：$(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}=u_1v_1+\cdots+u_nv_n$
- 外積（２次元）：$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=u_1v_2-u_2v_1$
- 外積（３次元）：$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)^{\mathsf{T}}$
- ノルム（ユークリッドノルム）：$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})}=\sqrt{u_1^2+\cdots+u_n^2}$

とします．また，点 P の位置ベクトルをボールド体で $\mathbf{P}$ と表記します．

1.　２次元幾何計算

1.1.　２点間の距離

２点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ の距離(ユークリッド距離) d は次の式で求めます．

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ . \tag{1-1}$$

1.2.　２点の中点座標

２点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ の中点 C は次の式で求めます．

$$C:\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right). \tag{1-2}$$

1.3.　２点を通る直線

２点 $\mathbf{P}_1=(x_1,y_1)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{P}_2=(x_2,y_2)^{\mathsf{T}}$ を通る直線 $l:ax+by+c=0$ の係数 a,b,c は次のように求めます．ただし，直線 l の法線ベクトル $(a,b)^{\mathsf{T}}$ は単位ベクトルとします．

直線 l の法線ベクトルが $\mathbf{w}=\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1=(x_2-x_1,y_2-y_1)^{\mathsf{T}}$ に直交することより，

$$a=\frac{-(y_1-y_2)}{\|\mathbf{w}\|},\quad b=\frac{x_2-x_1}{\|\mathbf{w}\|},\quad c=-ax_1-by_1 \tag{1-3}$$

となります．

1.4.　２点の垂直二等分線

２点 $\mathbf{P}_1=(x_1,y_1)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{P}_2=(x_2,y_2)^{\mathsf{T}}$ を結ぶ線分の垂直二等分線 $l:ax+by+c=0$ の係数 a,b,c は次のように求めます．ただし，直線 l の法線ベクトル $(a,b)^{\mathsf{T}}$ は単位ベクトルとします．

直線 l は２点の中点 $C:(p,q)=\big((x_1+x_2)/2,\ (y_1+y_2)/2\big)$ を通り，かつ直線 l の法線ベクトルが $\mathbf{v}=\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1=(x_2-x_1,y_2-y_1)^{\mathsf{T}}$ であることより，

$$a=\frac{x_2-x_1}{\|\mathbf{v}\|},\quad b=\frac{y_1-y_2}{\|\mathbf{v}\|},\quad c=-ap-bq \tag{1-4}$$

となります．

1.5.　指定点を通り，指定直線に垂直な直線

点 $P(p,q)$ を通り，直線 $l:ax+by+c=0$ に垂直な直線 $L:Ax+By+C=0$ の係数 A,B,C は次のように求めます．ただし，直線 L の法線ベクトル $(A,B)^{\mathsf{T}}$ は単位ベクトルとします．

直線Lは点Pを通り，かつ直線Lの法線ベクトルが$\mathbf{v}=(b,-a)^{\mathsf{T}}$であることより，

$$A=\frac{b}{\|\mathbf{v}\|},\quad B=\frac{-a}{\|\mathbf{v}\|},\quad C=-Ap-Bq \tag{1-5}$$

となります.

1.6.　指定点を通り，指定の傾きをもつ直線

点$P(p,q)$を通り，傾きθをもつ直線$l:ax+by+c=0$の係数a,b,cは次のように求めます．ただし，直線lの法線ベクトル$(a,b)^{\mathsf{T}}$は単位ベクトルとします.

直線lは点Pを通り，かつ法線ベクトルが$\mathbf{v}=(-\sin\theta,\cos\theta)^{\mathsf{T}}$であることより，

$$a=-\sin\theta,\quad b=\cos\theta,\quad c=-ap-bq \tag{1-6}$$

となります.

1.7.　２直線の交点

直線$l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$と直線$l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$の交点$P(p,q)$は次のように求めます.

直線l_1と直線l_2を連立させて行列の形に書くと，

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}$$

となります．交点$P(p,q)$はこの連立方程式の解であるので，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} \tag{1-7}$$

として得られます.

1.8.　２直線の交角

直線$l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$と直線$l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$の交角θ（小さい方の角）は次のように求めます.

交角θは，直線l_1の法線ベクトル$\mathbf{u}=(a_1,b_1)^{\mathsf{T}}$および直線$l_2$の法線ベクトル$\mathbf{v}=(a_2,b_2)^{\mathsf{T}}$のなす角に等しくなります．このとき，２ベクトル$\mathbf{u},\mathbf{v}$のなす角のうち小さい方の角$\theta$は，

$$\theta=\sin^{-1}\frac{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \tag{1-8}$$

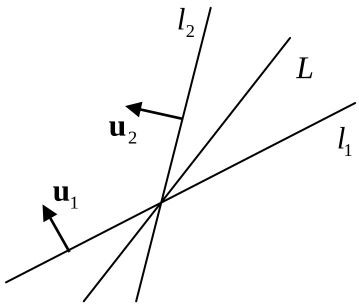
として得られます．ただし，$\theta=0$かつ$c_1/\|\mathbf{u}\|\neq\mathrm{sgn}((\mathbf{u},\mathbf{v}))c_2/\|\mathbf{v}\|$（$\mathrm{sgn}(t)$は実数$t$の符号関数（1または －1））である場合は，２直線が一致せずに平行となるので，交角はありません.

1.9.　２直線の中央線（交角の２等分線）

直線$l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$と直線$l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$の中央線，すなわち２直線l_1,l_2からの等距離線$L:Ax+By+C=0$の係数A,B,Cは次のように求めます．ただし，直線Lの法線ベクトル$(A,B)^{\mathsf{T}}$は単位ベクトルとします.

まず，２直線l_1,l_2のそれぞれの法線ベクトルを$\mathbf{u}_1=(a_1,b_1)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{u}_2=(a_2,b_2)^{\mathsf{T}}$とするとき，もし内

積$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) < 0$であれば，$l_1$と$l_2$のいずれかの方程式を予め（－１）倍しておきます．これは，法線ベクトルを同じ方向に向けることを意図しています．



さて，直線L上の任意の点を$P(x, y)$とすると，点Pから２直線l_1, l_2への距離が等距離であることより，

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\|\mathbf{u}_2\|}$$

と書けます．ところが，いまはl_1, l_2の法線ベクトルを同じ方向にそろえてあるため，直線L上の点においては左辺と右辺の絶対値内の符号が異なっています．よって，絶対値をはずせば，

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\|\mathbf{u}_2\|}$$

となるので，整理すれば，

$$\left(\frac{a_1}{\|\mathbf{u}_1\|} + \frac{a_2}{\|\mathbf{u}_2\|}\right)x + \left(\frac{b_1}{\|\mathbf{u}_1\|} + \frac{b_2}{\|\mathbf{u}_2\|}\right)y + \left(\frac{c_1}{\|\mathbf{u}_1\|} + \frac{c_2}{\|\mathbf{u}_2\|}\right) = 0$$

となり，これが求める直線Lです．したがって，上式の係数をそれぞれ

$$L_a = \frac{a_1}{\|\mathbf{u}_1\|} + \frac{a_2}{\|\mathbf{u}_2\|}, \quad L_b = \frac{b_1}{\|\mathbf{u}_1\|} + \frac{b_2}{\|\mathbf{u}_2\|}, \quad L_c = \frac{c_1}{\|\mathbf{u}_1\|} + \frac{c_2}{\|\mathbf{u}_2\|}$$

とおけば，求める係数A, B, Cは，

$$A = \frac{L_a}{\sqrt{L_a{}^2 + L_b{}^2}}, \quad B = \frac{L_b}{\sqrt{L_a{}^2 + L_b{}^2}}, \quad C = \frac{L_c}{\sqrt{L_a{}^2 + L_b{}^2}} \tag{1-9}$$

となります．なお，中央線Lは，もし２直線l_1, l_2が交わるならば，その小さいほうの交角の２等分線となっています．

1.10. 点と直線の距離

点$P(p, q)$と直線$l : ax + by + c = 0$の距離dは次の式で求めます．

$$d = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{1-10}$$

1.11. 点から直線へ下した垂線の足

点Pから直線lへ下した垂線の足Hは次のように求めます．

まず，式(1-5)から，点Pを通り直線lに垂直な直線Lを求めます．次に，式(1-7)から，直線lと直線Lの交点Hを求めれば，これが垂線の足となります．

1.12. 直線の平行移動

直線$l : ax + by + c = 0$を移動量$\mathbf{t} = (p, q)^{\mathrm{T}}$だけ平行移動したときの直線$L : Ax + By + C = 0$の係数$A, B, C$は次のように求めます．

直線L上の任意の点$\mathbf{P}=(x, y)^{\mathsf{T}}$に対し，それの移動前の点$\tilde{\mathbf{P}}=\mathbf{P}-\mathbf{t}=(x-p, y-q)^{\mathsf{T}}$が直線$l$上にあることより，$a(x-p)+b(y-q)+c=0$が成り立ちます．よって，

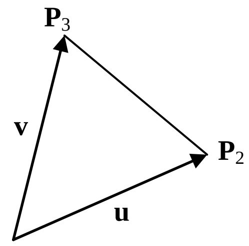
$$A=a,\quad B=b,\quad C=c-ap-bq \tag{1-11}$$

となります.

1.13. ３点の作る三角形の面積

３点$\mathbf{P}_1=(x_1, y_1)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{P}_2=(x_2, y_2)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{P}_3=(x_3, y_3)^{\mathsf{T}}$の作る三角形の符号付き面積$S$は次のように求めます.

点$\mathbf{P}_1$を始点とした２ベクトルを$\mathbf{u}=\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1=(x_2-x_1, y_2-y_1)^{\mathsf{T}}$および$\mathbf{v}=\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_1=(x_3-x_1, y_3-y_1)^{\mathsf{T}}$とするとき, 外積$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$は２ベクトルの作る平行四辺形の（符号付き）面積であるので，求めるべき三角形の符号付き面積Sは,



$$S=\frac{1}{2}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\frac{1}{2}\left\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)\right\} \tag{1-12}$$

となります. 符号なしの面積（通常の面積）は，Sの絶対値$|S|$となります.

1.14. ３点を通る円

３点$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$を通る円$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$の中心$(a,b)$および半径$r$は次のように求めます.

円Cの方程式を展開して$-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=-(x^2+y^2)$の形に整理し，ここに３点を代入して行列の形に書くと，$c=a^2+b^2-r^2$として

$$\begin{pmatrix}-2x_1 & -2y_1 & 1\\ -2x_2 & -2y_2 & 1\\ -2x_3 & -2y_3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(x_1^2+y_1^2)\\ -(x_2^2+y_2^2)\\ -(x_3^2+y_3^2)\end{pmatrix}$$

となります．したがって，円Cの中心(a,b)および半径rは,

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_1 & -2y_1 & 1\\ -2x_2 & -2y_2 & 1\\ -2x_3 & -2y_3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-(x_1^2+y_1^2)\\ -(x_2^2+y_2^2)\\ -(x_3^2+y_3^2)\end{pmatrix},\quad r=\sqrt{a^2+b^2-c} \tag{1-13}$$

として得られます.

1.15. ２点を直径の両端とする円

２点$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$を直径の両端とする円$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$の中心$(a,b)$および半径$r$は次の式で求めます.

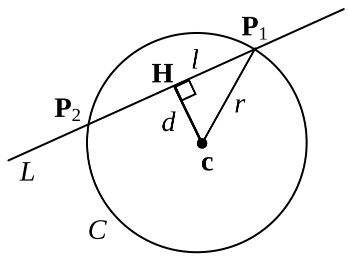
$$(a,b)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ . \tag{1-14}$$

1.16. 直線と円の交点

直線$L:\alpha x+\beta y+\gamma=0$と円$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$が交わるときの二つの交点$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$は次の

ように求めます.

初めに，円 C の中心 $\mathbf{c}=(a,b)^{\mathsf{T}}$ から直線へ下した垂線の足 $\mathbf{H}$ を求めます．また，中心 $\mathbf{c}$ から $\mathbf{H}$ までの距離を d とします．もし $d>r$ であれば交点は存在しません． $d\le r$ であれば直線 L と円 C は交わり，$\mathbf{H}$ から交点までの距離 l は，$l=\sqrt{r^2-d^2}$ として得られます．このとき，直線 L の方向ベクトルが $\mathbf{v}=(\beta,-\alpha)^{\mathsf{T}}$ であることより，求めるべき２つの交点は,



$$\mathbf{P}_1=\mathbf{H}+l\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},\quad \mathbf{P}_2=\mathbf{H}-l\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \tag{1-15}$$

として得られます．なお， $d=r$ の場合， ２交点は一致します.

1.17. 指定点から円に引いた接線と接点

点 $\mathbf{Q}=(p,q)^{\mathsf{T}}$ から円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ へ引いた二つの接線 $L_1:\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0$ および $L_2:\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0$ と，各接線の円周上の接点をそれぞれ $\mathbf{P}_1=(x_1,y_1)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{P}_2=(x_2,y_2)^{\mathsf{T}}$ とするとき，これらの接線と接点は次のように求めます．ただし，接線 L_1, L_2 のそれぞれの法線ベクトル $\mathbf{u}_1=(\alpha_1,\beta_1)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{u}_2=(\alpha_2,\beta_2)^{\mathsf{T}}$ は単位ベクトルとします.

まず，円 C の中心を $\mathbf{c}=(a,b)^{\mathsf{T}}$ とし，線分 $\overline{QP_1}$ の長さを l とすれば，$l=\sqrt{\|\mathbf{Q}-\mathbf{c}\|^2-r^2}$ と計算できます.

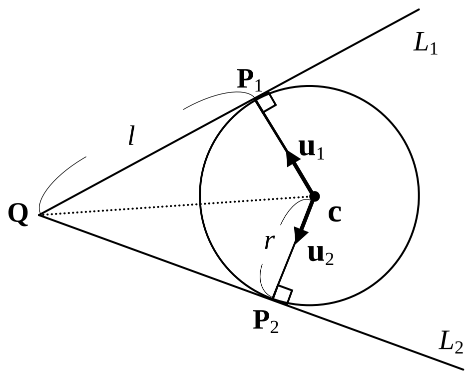
さて，最初に接線の法線ベクトル $\mathbf{u}_1$ を求めることにします．まず，線分 $\overline{Qc}$ の $\mathbf{u}_1$ 方向への正射影を考えれば,

$$\big((\mathbf{Q}-\mathbf{c}),\mathbf{u}_1\big)=r \qquad ①$$

が得られます．つぎに，$\Delta\, QcP_1$ の面積を考えれば,

$$\frac{1}{2}(\mathbf{Q}-\mathbf{c})\times(r\mathbf{u}_1)=-\frac{1}{2}rl$$

$$\therefore (\mathbf{Q}-\mathbf{c})\times\mathbf{u}_1=-l \qquad ②$$



が得られます．ただし，式②の右辺に負号がつくのは，座標系を右手系とした場合です．式①，式②を成分で書き，それらを連立させて行列で表せば,

$$\begin{pmatrix} p-a & q-b \\ -(q-b) & p-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ -l\end{pmatrix}$$

となります．これより，接線 L_1 の法線ベクトル $\mathbf{u}_1$ および係数 γ_1 が,

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p-a & q-b \\ -(q-b) & p-a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} r \\ -l\end{pmatrix},\quad \gamma_1=-\alpha_1 p-\beta_1 q \tag{1-16}$$

として得られます．またこのとき，接点 $\mathbf{P}_1$ は,

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{c}+r\mathbf{u}_1 \tag{1-17}$$

となります．同様にして，接線 L_2 の法線ベクトル $\mathbf{u}_2$ および係数 γ_2 が,

$$\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p-a & q-b \\ -(q-b) & p-a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} r \\ l\end{pmatrix},\quad \gamma_2=-\alpha_2 p-\beta_2 q \tag{1-18}$$

として得られます．式(1-16)との違いは l の負号が外れたことです．そしてこのとき，接点 $\mathbf{P}_2$ は，

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{c} + r\mathbf{u}_2 \tag{1-19}$$

となります．

1.18. 指定点から円への最近点と，そこまでの距離

点 $\mathbf{Q}$ から円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ への最近点 $\mathbf{P}$ と，そこまでの距離 d は次のように求めます．

円 C の中心を $\mathbf{c}=(a,b)^{\mathsf{T}}$ とすれば，最近点 $\mathbf{P}$ は，点 $\mathbf{Q}$ と中心 $\mathbf{c}$ を通る直線 l と円 C との交点です．すると，この直線 l の単位方向ベクトルを

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{Q}-\mathbf{c}}{\|\mathbf{Q}-\mathbf{c}\|}$$

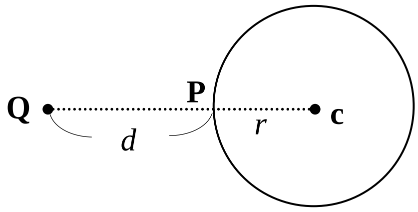
とすれば，最近点 $\mathbf{P}$ は

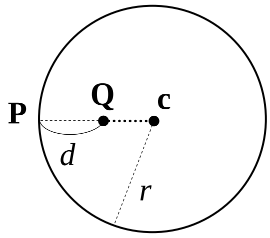
$$\mathbf{P} = \mathbf{c} + r\mathbf{u} \tag{1-20}$$

となります．また，距離 d は，

$$d = \left|\,\|\mathbf{Q}-\mathbf{c}\| - r\,\right| \tag{1-21}$$

となります．





2. ３次元幾何計算

３次元空間における直線の表現として，以下ではベクトル方程式すなわちパラメータによる表現を用います．これは，点 $\mathbf{p}$ を通り方向ベクトルが $\mathbf{u}$ である直線を，t を任意の実数として $\mathbf{r}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}$ と表す表現方法です．また，平面 $ax+by+cz+d=0$ の表現としては，法線ベクトルを $\mathbf{n}=(a,b,c)^{\mathsf{T}}$ および $\mathbf{x}=(x,y,z)^{\mathsf{T}}$ として，$(\mathbf{n},\mathbf{x})+d=0$ と表せることを用います．

2.1. ２点間の距離

２点 $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2)$ の距離（ユークリッド距離）d は次の式で求めます．

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\ . \tag{2-1}$$

2.2. ２点の中点座標

２点 $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2)$ の中点 C は次の式で求めます．

$$C:\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right). \tag{2-2}$$

2.3. ２点を通る直線

２点 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$ を通る直線 $l:\mathbf{r}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}$ 上の点 $\mathbf{p}$ と方向ベクトル $\mathbf{u}$ は次のように求めます．ただし，直線 l の方向ベクトル $\mathbf{u}$ は単位ベクトルとします．

直線 l が点 $\mathbf{P}_1$ を通ること，および方向ベクトル $\mathbf{u}$ が $\mathbf{w}=\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1$ に平行であることより，

$$\mathbf{p}=\mathbf{P}_1\,,\quad \mathbf{u}=\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \tag{2-3}$$

となります．

2.4.　点から直線へ下した垂線の足

点$\mathbf{Q}$から直線$l:\mathbf{r}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}$へ下した垂線の足$\mathbf{H}$は次のように求めます．ただし，直線$l$の方向ベクトル$\mathbf{u}$は単位ベクトルとします．

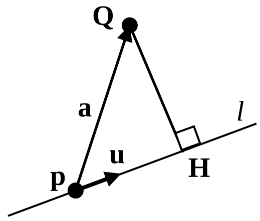
ベクトル$\mathbf{a}=\mathbf{Q}-\mathbf{p}$を直線$l$へ正射影したベクトル$\mathbf{w}$は，

$$\mathbf{w}=(\mathbf{a},\mathbf{u})\mathbf{u}$$

となります．これがベクトル$\mathbf{H}-\mathbf{p}$と等しいことより，垂線の足$\mathbf{H}$は

$$\mathbf{H}=\mathbf{p}+\mathbf{w}=\mathbf{p}+(\mathbf{a},\mathbf{u})\mathbf{u} \tag{2-4}$$

として得られます．



2.5.　指定点を通り，指定直線に垂直な直線

点$\mathbf{Q}$を通り，直線lに垂直な直線Lは次のように求めます．

まず，式(2-4)より，点$\mathbf{Q}$から直線lへ下した垂線の足$\mathbf{H}$を求めます．次に，式(2-3)から，点$\mathbf{Q}$と点$\mathbf{H}$を通る直線を求めれば，これが求めるべき直線Lとなります．

2.6.　点と直線の距離

点$\mathbf{Q}$と直線lの距離dは次のように求めます．

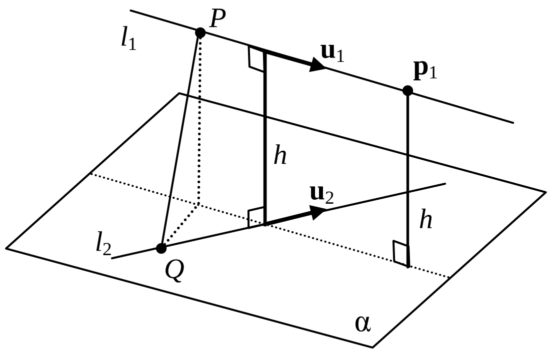
まず，式(2-4)より，点$\mathbf{Q}$から直線lへ下した垂線の足$\mathbf{H}$を求めます．次に，式(2-1)から，点$\mathbf{Q}$と点$\mathbf{H}$の距離求めれば，これが求めるべき距離dとなります．

2.7.　２直線の最短距離

２直線$l_1:\mathbf{r}=\mathbf{p}_1+t\mathbf{u}_1$, $l_2:\mathbf{r}=\mathbf{p}_2+t\mathbf{u}_2$の最短距離は次のように求めます．

まず, 直線l_1に平行で直線l_2を含む平面$\alpha:(\mathbf{n},\mathbf{x})+d=0$を考えます. 平面$\alpha$の法線は２直線$l_1, l_2$に垂直となるので，$\mathbf{n}=\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2$となります．また，直線$l_2$上の点$\mathbf{p}_2$を含むことより，$d=-(\mathbf{n},\mathbf{p}_2)$となります．したがって，平面$\alpha$は$(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2,\mathbf{x}-\mathbf{p}_2)=0$と表すことができます．

さて, 直線l_1と平面αとの距離をhとすれば, 直線l_1上の点Pと直線l_2上の点Qとの距離PQは，$PQ\geq h$となります．よって，PQの最小値すなわち直線l_1と直線l_2の最短距離はhとなります. したがって, 直線l_1上の点$\mathbf{p}_1$と平面αの距離から



$$h=\frac{\left|(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2,\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\right|}{\left\|\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2\right\|} \tag{2-5}$$

となります．なお，$\left\|\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2\right\|=0$の場合は直線$l_1$と直線$l_2$は平行となるので，最短距離は直線$l_1$上の点$\mathbf{p}_1$と直線$l_2$の距離となります．

2.8.　３点を通る平面

３点$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_3$を通る平面直線$\alpha:(\mathbf{n},\mathbf{x})+d=0$は次のように求めます．ただし，平面$\alpha$の法線べ

クトル$\mathbf{n}$は単位ベクトルとします．

点$\mathbf{P}_1$を始点としたベクトル$\mathbf{u}=\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1$およびベクトル$\mathbf{v}=\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_1$を考えれば，平面$\alpha$の法線ベクトル$\mathbf{n}$はこれらに垂直であることより，

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|},\quad d=-(\mathbf{n},\mathbf{P}_1) \tag{2-6}$$

となります．

2.9. 指定点を通り，指定ベクトルに垂直な平面

点$\mathbf{Q}$を通り，指定ベクトル$\mathbf{v}$に垂直な平面$\alpha:(\mathbf{n},\mathbf{x})+d=0$は次の式で求めます．ただし，平面$\alpha$の法線ベクトル$\mathbf{n}$は単位ベクトルとします．

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},\quad d=-(\mathbf{n},\mathbf{Q}). \tag{2-7}$$

2.10. 指定点を通り，指定平面に垂直な直線

点$\mathbf{Q}$を通り，指定平面$\alpha:(\mathbf{n},\mathbf{x})+d=0$に垂直な直線$l:\mathbf{r}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}$は次の式で求めます．ただし，直線$l$の方向ベクトル$\mathbf{u}$は単位ベクトルとします．

$$\mathbf{p}=\mathbf{Q},\quad \mathbf{u}=\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}. \tag{2-8}$$

2.11. 点と平面の距離

点$Q(p,q,r)$と平面$\alpha:ax+by+cz+d=0$の距離hは次の式で求めます．

$$h=\frac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{2-9}$$

2.12. 直線と平面の交点

直線$l:\mathbf{r}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}$と平面$\alpha:(\mathbf{n},\mathbf{x})+d=0$の交点$\mathbf{Q}$は次のように求めます．

まず，直線の式を平面の式に代入すると，

$$(\mathbf{n},\mathbf{p}+t\mathbf{u})+d=(\mathbf{n},\mathbf{p})+t(\mathbf{n},\mathbf{u})+d=0$$

$$\therefore\quad t=-\frac{(\mathbf{n},\mathbf{p})+d}{(\mathbf{n},\mathbf{u})}$$

が得られます．よって，交点$\mathbf{Q}$は

$$\mathbf{Q}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}=\mathbf{p}-\frac{(\mathbf{n},\mathbf{p})+d}{(\mathbf{n},\mathbf{u})}\mathbf{u} \tag{2-10}$$

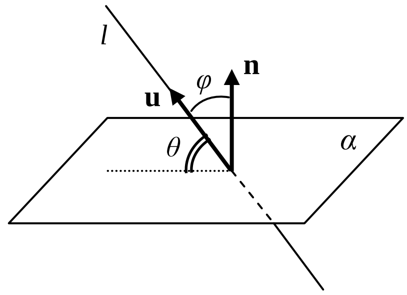
となります．なお，$(\mathbf{n},\mathbf{u})=0$の場合は直線$l$と平面$\alpha$が平行となるので，交点はありません．

2.13. 直線と平面の交角

直線$l:\mathbf{r}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}$と平面$\alpha:(\mathbf{n},\mathbf{x})+d=0$の交角$\theta$（小さい方の角）は次のように求めます．

まず，直線lの方向ベクトル$\mathbf{u}$と平面αの法線ベクトル$\mathbf{n}$のなす角のうち，小さい方の角φを求めれば，

$$\varphi = \sin^{-1}\frac{|\mathbf{u}\times\mathbf{n}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{n}\|}$$



として得られます．すると，交角θはその余角となるので，

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{|\mathbf{u}\times\mathbf{n}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{n}\|} \qquad (2\text{-}11)$$

として得られます．なお，$(\mathbf{n},\mathbf{u})=0$かつ$(\mathbf{n},\mathbf{p})+d\neq 0$の場合は，直線$l$と平面$\alpha$が一致せずに平行となるので，交角はありません．

2.14. 点から平面へ下した垂線の足

点$\mathbf{Q}$から平面αへ下した垂線の足$\mathbf{H}$は次のように求めます．

まず，式(2-8)より，点$\mathbf{Q}$を通り平面αに垂直な直線lを求めます．次に，式(2-10)から，直線lと平面αの交点を求めれば，これが求めるべき垂線の足$\mathbf{H}$となります．

2.15. ２平面の交線

２平面$\alpha_1:(\mathbf{n}_1,\mathbf{x})+d_1=0$と$\alpha_2:(\mathbf{n}_2,\mathbf{x})+d_2=0$の交線$l:\mathbf{r}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}$は次のように求めます．

まず，原点を通り２平面α_1,α_2に直交する平面βを考えます．すると，この平面βは２平面α_1,α_2のそれぞれの法線ベクトル$\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$を含みます．もし，$\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$が１次独立ならば，これらにより張られる２次元空間が平面βとなり，このとき平面βは交線lとも直交しています．したがって，平面β上の点は$\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$の１次結合で表せるので，交線$l$上の１点$\mathbf{p}$（平面$\beta$と交線$l$の交点）は適当な実数$a,b$により$\mathbf{p}=a\mathbf{n}_1+b\mathbf{n}_2$と表されます．そこで，初めにこの実数$a,b$を定めて，点$\mathbf{p}$を求めることにします．

点$\mathbf{p}$は平面α_1,α_2上にあることより，代入すると，

$$(\mathbf{n}_1, a\mathbf{n}_1+b\mathbf{n}_2)+d = a\|\mathbf{n}_1\|^2 + b(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)+d_1 = 0 \qquad ①$$

$$(\mathbf{n}_2, a\mathbf{n}_1+b\mathbf{n}_2)+d = a(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2) + b\|\mathbf{n}_2\|^2+d_2 = 0 \qquad ②$$

となります．式①，式②を連立させて行列を用いて書き直せば，

$$\begin{pmatrix} \|\mathbf{n}_1\|^2 & (\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2) \\ (\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2) & \|\mathbf{n}_2\|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \end{pmatrix} \qquad ③$$

と書けます．$\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$のなす角を$\theta$とすれば，式③の係数行列の行列式$\Delta$は，

$$\begin{aligned}\Delta &= \|\mathbf{n}_1\|^2\|\mathbf{n}_2\|^2 - (\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)^2 = \|\mathbf{n}_1\|^2\|\mathbf{n}_2\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{n}_1\|^2\|\mathbf{n}_2\|^2\sin^2\theta = \|\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2\|^2\end{aligned}$$

となります．したがって式③から，a,bが

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2\|^2}\begin{pmatrix} \|\mathbf{n}_2\|^2 & -(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2) \\ -(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2) & \|\mathbf{n}_1\|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \end{pmatrix}$$

として得られるので，結局，直線l上の点$\mathbf{p}=a\mathbf{n}_1+b\mathbf{n}_2$は

$$\mathbf{p}=\frac{((\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)d_2-\|\mathbf{n}_2\|^2 d_1)\mathbf{n}_1+((\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)d_1-\|\mathbf{n}_1\|^2 d_2)\mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2\|^2} \tag{2-12}$$

となります.

一方，直線 l の方向ベクトル $\mathbf{u}$ は $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$ に直交するので,

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2\|} \tag{2-13}$$

として得られます.

以上，式(2-12)，式(2-13)で直線 l が定まりました．なお，$\|\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2\|=0$ の場合，すなわち $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$ が１次従属の場合は平面 α_1 と平面 α_2 が平行となるので，交線はありません.

2.16. ２平面の交角

２平面 $\alpha_1:(\mathbf{n}_1,\mathbf{x})+d_1=0$ と $\alpha_2:(\mathbf{n}_2,\mathbf{x})+d_2=0$ の交角 θ（小さい方の角）は次のように求めます.

２平面の交角 θ は，それぞれの法線ベクトル $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$ のなす角に等しいので，そのうちの小さい方の角を求めれば,

$$\theta=\sin^{-1}\frac{|\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\|\|\mathbf{n}_2\|} \tag{2-14}$$

として得られます．ただし，$\theta=0$ かつ $d_1/\|\mathbf{n}_1\|\neq\mathrm{sgn}((\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2))d_2/\|\mathbf{n}_2\|$（$\mathrm{sgn}(t)$ は実数 t の符号関数（1 または −1））である場合は，２平面が一致せずに平行となるので，交角はありません.

〈参考文献〉

[1] 金谷健一，“形状 CAD と図形の数学”，共立出版，1998
[2] 春日正文，“モノグラフ 公式集 5 訂版”，科学新興新社，1996
[3] “大学への数学 1 対 1 対応の演習 代数・幾何”，東京出版，1994

改訂履歴

Version No.	内　　容
1.0	• 新規発行
1.1	• 誤記，表記法および体裁の修正 • 項目の入れ替え，および4項目(1.6 項，1.9 項，1.12 項，1.18 項)の追加
1.2	• (2次元幾何計算)2直線の交角における直線一致条件の修正 • (3次元幾何計算)2平面の交角における平面一致条件の修正

以上