点群マッチングのアルゴリズム

（Ver.1.1）

2013 年 6 月

株式会社 アイディール

目次

1. 問題設定と解法の概要

点群マッチングは次の問題を対象としています．

同数のデータ点数nをもつ二つの２次元点群S, Tがあったとき，これらは図形として相似であって，点ごとの対応が既知であるとします．このとき，点群S（テンプレート点群）に対して平行移動(x, y)，基準点まわりの回転θおよび基準点中心の拡大・縮小（相似変換）sを行って，点群T（目標点群）に合わせ込み（マッチング）を行うことを考えます．しかし，実際の各点の位置データには誤差が含まれているので，完全に一致させることはできません．そこで，ある評価値を設け，この評価値が最小となるようにパラメータ$\mathbf{p} = (x, y, \theta, s)^{\mathsf{T}}$（$\mathsf{T}$は転置を表す）を決定することにします．

評価値の最小化手法には，《最小二乗法》と《ミニマックス法》を採用します．そして，評価値は対応点間の‘距離’とするのですが，次に示すように，それぞれの手法でこの‘距離’の測り方が異なっています．まず，点群の第k対応点間のユークリッド距離（誤差）をε_k，$k = 1, \cdots, n$とし，パラメータ$\mathbf{p}$における誤差のベクトルを$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)^{\mathsf{T}}$とします．このとき，評価値としての‘距離’となる‘誤差ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}$の大きさ（ノルム）’を次のように２種類定義します．

$$\text{ユークリッドノルム：}\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k{}^2}\,, \qquad \text{最大値ノルム：}\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}\right\|_\infty = \max_k\left|\varepsilon_k\right|.$$

すると，$\mathbf{p}$を未知パラメータとして

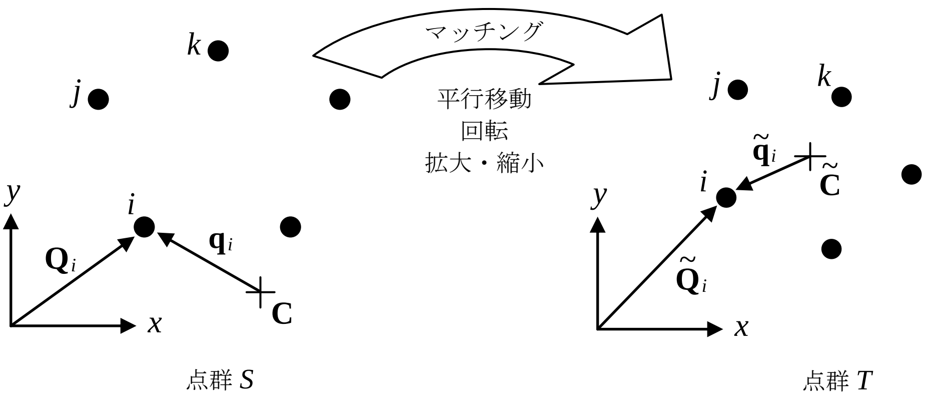
《最小二乗法》はユークリッドノルムの最小化（$\min_{\mathbf{p}}\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}\right\|_2^2$），

《ミニマックス法》は最大値ノルムの最小化（$\min_{\mathbf{p}}\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}\right\|_\infty$），

を行うことになります．なお，もう一つの手法として《ロバスト推定》がありますが，これは誤差ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}$内の外れ値を省いて最小二乗法を行う方法です．

2. 記号設定

以下のように記号を設定します（点群Tに関する記号には上に“~”をつけることにします）．



- $\mathbf{C}$：点群Sの基準点の位置ベクトル
- $\tilde{\mathbf{C}}$：点群Tの重心の位置ベクトル（定ベクトル）
- $\mathbf{Q}_i$，$\tilde{\mathbf{Q}}_i$：各点の位置ベクトル（$\tilde{\mathbf{Q}}_i$は定ベクトル）
- $\mathbf{q}_i$，$\tilde{\mathbf{q}}_i$：各点の基準点あるいは重心からの位置ベクトル（定ベクトル）

- s　　：スケール（相似比）
- $\mathbf{R}$ *or* $\mathbf{R}_\theta$：角度θの回転行列，すなわち$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$：列ベクトル $\mathbf{u}$ と列ベクトル $\mathbf{v}$ の内積，すなわち $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}$ （ T は転置）
- $\|\mathbf{u}\|$　：ベクトル $\mathbf{u}$ のユークリッドノルム，すなわち $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$

さらに，次の表現も用います．

$$\mathbf{R}' = \frac{d}{d\theta}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix},\quad \mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix},\quad \tilde{\mathbf{q}}_i = \begin{pmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \end{pmatrix},\quad \tilde{\mathbf{Q}}_i = \begin{pmatrix} \tilde{X}_i \\ \tilde{Y}_i \end{pmatrix}.$$

以上のように記号を用意すると，動かす方（合わせ込む方）の点群Sの各点の位置ベクトル $\mathbf{Q}_i$ は，$\mathbf{Q}_i = \mathbf{C} + s\mathbf{R}_\theta\mathbf{q}_i$，$i = 1, \cdots, n$ （nは点の数）と表すことができて，これは $\mathbf{C}, \theta, s$ の関数となります：$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{C}, \theta, s)$．すると，求めるべきパラメータは，点集合$S$の基準点 $\mathbf{C}$，$\mathbf{C}$ のまわりの回転角 θ およびスケール s となります．

3.　公式

以下の計算に用いる公式をまとめておきます．

まず，ベクトルに関する次の微分公式を用います．

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ をn次元列ベクトル，$f(\mathbf{u})$ をスカラー値関数とするとき，

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right)^\mathsf{T},\quad \frac{\partial \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{v},\quad \frac{\partial \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\|\mathbf{u}\|^2 = 2\mathbf{u}. \tag{3-1}$$

次に，回転行列 $\mathbf{R}$ に関する関係式をまとめておきます．まず，$\mathbf{R}$ は直交行列（ $\mathbf{R}^\mathsf{T} = \mathbf{R}^{-1}$ ）であるので，ベクトルのノルムを保存します．すなわち，任意の２次元ベクトル $\mathbf{u}$ に対して

$$\|\mathbf{R}\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 \tag{3-2}$$

となります．次に，$\mathbf{R}$ の微分については，

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}\mathbf{R}_{\pi/2} = \mathbf{R}_{\pi/2}\mathbf{R} \tag{3-3}$$

と書き表すことができます．また，式(3-3)より

$$\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}' = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}_{\pi/2} = \mathbf{R}_{\pi/2} \tag{3-4}$$

となることに注意すると，任意の２次元ベクトル $\mathbf{u}$ に対して $\mathbf{R}\mathbf{u}$ と $\mathbf{R}'\mathbf{u}$ が直交することが分かります．すなわち，

$$\langle \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{R}'\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}'\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{R}_{\pi/2}\mathbf{u} \rangle = 0 \tag{3-5}$$

となります．

4.　最小二乗解

最小化すべき関数 $f(\mathbf{C}, \theta, s)$ を次のように定義します．

$$f(\mathbf{C}, \theta, s) = \sum_{i=1}^{n} \left\| \mathbf{Q}_i - \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\|^2. \tag{4-1}$$

ここで，$\mathbf{Q}_i$ と $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ の距離は次のように展開できます．

$$
\begin{aligned}
\left\| \mathbf{Q}_i - \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\|^2 &= \left\| \mathbf{C} + s\mathbf{R}\mathbf{q}_i - \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\|^2 = \left\langle \mathbf{C} + s\mathbf{R}\mathbf{q}_i - \tilde{\mathbf{Q}}_i, \mathbf{C} + s\mathbf{R}\mathbf{q}_i - \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle \\
&= \left\| \mathbf{C} \right\|^2 + 2s\left\langle \mathbf{C}, \mathbf{R}\mathbf{q}_i \right\rangle - 2\left\langle \mathbf{C}, \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle - 2s\left\langle \mathbf{R}\mathbf{q}_i, \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle + s^2\left\| \mathbf{q}_i \right\|^2 + \left\| \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\|^2 .
\end{aligned} \tag{4-2}
$$

ただし，式(3-2)より$\left\| \mathbf{R}\mathbf{q}_i \right\|^2 = \left\| \mathbf{q}_i \right\|^2$ であることを用いました．

さて， $f(\mathbf{C}, \theta, s)$ を最小化する解を求めるために， f を各パラメータ $\mathbf{C}, \theta, s$ で微分して 0 とおくことにします．まず， $\mathbf{C}$ で微分します．すると，

$$
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{C}} = \sum_i \left(2\mathbf{C} + 2s\mathbf{R}\mathbf{q}_i - 2\tilde{\mathbf{Q}}_i \right) = 2\left(n\mathbf{C} + s\mathbf{R}\sum_i \mathbf{q}_i - \sum_i \tilde{\mathbf{Q}}_i \right) = \mathbf{0}, \tag{4-3}
$$

$$
\therefore \quad \mathbf{C} = \frac{1}{n}\left(\sum_i \tilde{\mathbf{Q}}_i - s\mathbf{R}\sum_i \mathbf{q}_i \right) = \tilde{\mathbf{C}} - s\mathbf{R}\left(\frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right) \tag{4-4}
$$

となり，基準点 $\mathbf{C}$ が得られます．なお，式(4-4)の右辺第２項を移行した式

$$
\mathbf{C} + s\mathbf{R}\left(\frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right) = \tilde{\mathbf{C}} \tag{4-5}
$$

の左辺は，点群 S の重心の位置ベクトルとなっています．すなわち，式(4-5)は点群 S の重心を点群 T の重心に一致させることを示しています．

次に， θ で微分します．その際，式(4-4)および $\tilde{\mathbf{q}}_i = \tilde{\mathbf{Q}}_i - \tilde{\mathbf{C}}$ であることから

$$
\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{Q}}_i = \tilde{\mathbf{C}} - s\mathbf{R}\left(\frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right) - \tilde{\mathbf{Q}}_i = -s\mathbf{R}\left(\frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right) - \tilde{\mathbf{q}}_i \tag{4-6}
$$

と書き直せること，および式(3-5)（ $\forall \mathbf{u}, \left\langle \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{R}'\mathbf{u} \right\rangle = 0$ ）を用いると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \sum_i \left(2s\left\langle \mathbf{C}, \mathbf{R}'\mathbf{q}_i \right\rangle - 2s\left\langle \mathbf{R}'\mathbf{q}_i, \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle \right) \\
&= 2s\sum_i \left\langle \mathbf{R}'\mathbf{q}_i, \mathbf{C} - \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle = -2s\sum_i \left\langle \mathbf{R}'\mathbf{q}_i, s\mathbf{R}\left(\frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right) + \tilde{\mathbf{q}}_i \right\rangle \\
&= -2s\left(\frac{s}{n}\left\langle \mathbf{R}'\sum_i \mathbf{q}_i, \mathbf{R}\sum_i \mathbf{q}_i \right\rangle + \sum_i \left\langle \mathbf{R}'\mathbf{q}_i, \tilde{\mathbf{q}}_i \right\rangle \right) \\
&= -2s\sum_i \left\langle \mathbf{R}'\mathbf{q}_i, \tilde{\mathbf{q}}_i \right\rangle = 0 .
\end{aligned} \tag{4-7}
$$

$$
\therefore \quad \sum_i \left\langle \mathbf{R}'\mathbf{q}_i, \tilde{\mathbf{q}}_i \right\rangle = 0 \tag{4-8}
$$

となります．ここで，

$$
\alpha = \sum_i \left(x_i\tilde{x}_i + y_i\tilde{y}_i \right), \quad \beta = \sum_i \left(x_i\tilde{y}_i - y_i\tilde{x}_i \right) \tag{4-9}
$$

とおけば，式(4-8)は

$$
\sum_i \left\langle \mathbf{R}'\mathbf{q}_i, \tilde{\mathbf{q}}_i \right\rangle = \alpha\sin\theta - \beta\cos\theta = 0 \tag{4-10}
$$

と書けます.

続けて, s で微分します. 式(4-6)および式(3-2)($\forall \mathbf{u}, \|\mathbf{Ru}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$)を用いると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= \sum_i \left(2\langle \mathbf{C}, \mathbf{Rq}_i \rangle - 2\langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{Q}}_i \rangle + 2s\|\mathbf{q}_i\|^2 \right) = 2\left(s\sum_i \|\mathbf{q}_i\|^2 + \sum_i \left\langle \mathbf{Rq}_i, \mathbf{C} - \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle \right) \\
&= 2\left(s\sum_i \|\mathbf{q}_i\|^2 + \sum_i \left\langle \mathbf{Rq}_i, -s\mathbf{R}\left(\frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right) - \tilde{\mathbf{q}}_i \right\rangle \right) \\
&= 2\left(s\sum_i \|\mathbf{q}_i\|^2 - s\frac{1}{n}\left\langle \mathbf{R}\sum_i \mathbf{q}_i, \mathbf{R}\sum_i \mathbf{q}_i \right\rangle - \sum_i \langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{q}}_i \rangle \right) \\
&= 2\left(s\left(\sum_i \|\mathbf{q}_i\|^2 - \frac{1}{n}\left\| \sum_i \mathbf{q}_i \right\|^2 \right) - \sum_i \langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{q}}_i \rangle \right) = 0 .
\end{aligned}
\tag{4-11}
$$

$$
\therefore \quad s = \frac{\sum_i \langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{q}}_i \rangle}{\sum_i \|\mathbf{q}_i\|^2 - \frac{1}{n}\left\| \sum_i \mathbf{q}_i \right\|^2} \tag{4-12}
$$

となります. ここで,

$$
V = \sum_i \|\mathbf{q}_i\|^2 - \frac{1}{n}\left\| \sum_i \mathbf{q}_i \right\|^2 = \sum_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) - \frac{1}{n}\left(\left(\sum_i x_i \right)^2 + \left(\sum_i y_i \right)^2 \right) \tag{4-13}
$$

とおき, 式(4-9)の α, β を用いれば, 式(4-12)は

$$
s = \frac{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}{V} \tag{4-14}
$$

と書けます.

最後に, 式(4-10)と式(4-14)から θ を $-\pi \le \theta < \pi$ の範囲で決定します. まず, V の符号を調べます. すると,

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_i \|\mathbf{q}_i\|^2 - \frac{1}{n}\left\| \sum_i \mathbf{q}_i \right\|^2 \\
&= \sum_i \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i \rangle - 2\frac{1}{n}\left\langle \sum_i \mathbf{q}_i, \sum_i \mathbf{q}_i \right\rangle + \frac{1}{n}\left\langle \sum_i \mathbf{q}_i, \sum_i \mathbf{q}_i \right\rangle \\
&= \sum_i \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i \rangle - 2\sum_i \left\langle \mathbf{q}_i, \frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right\rangle + n\left\langle \frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i, \frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right\rangle \\
&= \sum_i \left\langle \mathbf{q}_i - \frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i - \frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right\rangle \\
&= \sum_i \left\| \mathbf{q}_i - \frac{1}{n}\sum_i \mathbf{q}_i \right\|^2
\end{aligned}
\tag{4-15}
$$

と式変形できるので, $V > 0$ であることが分かりました. つぎに, 式(4-10)と式(4-14)を連立させて行列を用いて表せば,

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ sV \end{pmatrix} \tag{4-16}$$

と書けます．これを α, β について解けば

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ sV \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sV\cos\theta \\ sV\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4-17}$$

となり， $s>0$ かつ $V>0$ であるから

$$sV=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \tag{4-18}$$

が得られます．よって式(4-17)から,

$$\cos\theta=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \sin\theta=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \tag{4-19}$$

となります．これより θ が決まり，また式(4-19)を式(4-14)に代入すれば s が求まります.

5. ロバスト推定解

M 推定法によるロバスト推定では，第 i 番データの残差（マッチング誤差）を ε_i とするとき，推定関数 $\rho(\varepsilon_i)$ の和の最小化を行います[1]．すなわち， $\varepsilon_i=\varepsilon_i(\mathbf{C},\theta,s)$ とするとき

$$f(\mathbf{C},\theta,s)=\sum_i \rho(\varepsilon_i) \tag{5-1}$$

とおけば， $f(\mathbf{C},\theta,s)$ を最小化するパラメータ $\mathbf{C},\theta,s$ を推定することになります.

ここで, 推定関数 $\rho(x)$ は $x=0$ で唯一の最小値を持つ正定値偶関数であり, $\rho(x)=x^2$ のとき式(5-1)の最小化は最小二乗法となります．また，影響力関数および重み関数が次のように定義されます[1].

$$\text{影響力関数：}\ \psi(x)=\frac{\partial\rho(x)}{\partial x}, \qquad \text{重み関数：}\ w(x)=\frac{\psi(x)}{x}. \tag{5-2}$$

また，次の定義をしておきます.

$$w_i \equiv w(\varepsilon_i), \quad W \equiv \sum_i w(\varepsilon_i)=\sum_i w_i . \tag{5-3}$$

すると，推定するパラメータを $\mathbf{p}=(\mathbf{C}^T,\theta,s)^{\mathrm{T}}$ とおけば，式(5-1)を最小化する解は $f(\mathbf{p})$ を $\mathbf{p}$ で微分しそれを $\mathbf{0}$ とおくことで得られます．すなわち,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=\sum_i \frac{\partial\rho(\varepsilon_i)}{\partial\varepsilon_i}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\mathbf{p}}=\sum_i \psi(\varepsilon_i)\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\mathbf{p}}=\sum_i w(\varepsilon_i)\varepsilon_i\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\mathbf{p}}=\sum_i w_i\varepsilon_i\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\mathbf{p}}=\mathbf{0} \tag{5-4}$$

を解くことにより解となるパラメータを求めます. そして, それは反復計算にて求めます. つまり, (k) を反復回数として,

$$\sum_i w(\varepsilon_i(\mathbf{p}^{(k-1)}))\varepsilon_i(\mathbf{p}^{(k)})\frac{\partial\varepsilon_i(\mathbf{p}^{(k)})}{\partial\mathbf{p}}=\mathbf{0} \tag{5-5}$$

から $\mathbf{p}^{(k)}$ を求めて，次の重み $w(\varepsilon_i(\mathbf{p}^{(k)}))$ を決めていきます．重みの初期値は式(4-1)の最小二乗解を用います.

さて，マッチング時の各点における誤差評価値 ε_i は，式(4-2)より

$$\varepsilon_i(\mathbf{C},\theta,s)=\left\|\mathbf{Q}_i-\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\|$$
$$=\left(\left\|\mathbf{C}\right\|^2+2s\left\langle\mathbf{C},\mathbf{R}\mathbf{q}_i\right\rangle-2\left\langle\mathbf{C},\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\rangle-2s\left\langle\mathbf{R}\mathbf{q}_i,\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\rangle+s^2\left\|\mathbf{q}_i\right\|^2+\left\|\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5-6}$$

とし，式(5-4)にしたがい， f を各パラメータ $\mathbf{C},\theta,s$ で微分して 0 とおくことにします．

まず， $\mathbf{C}$ で微分します．

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{C}}=\sum_i w_i\varepsilon_i\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\mathbf{C}}=\sum_i w_i\varepsilon_i\frac{1}{2\varepsilon_i}\left(2\mathbf{C}+2s\mathbf{R}\mathbf{q}_i-2\tilde{\mathbf{Q}}_i\right)=\sum_i w_i\left(\mathbf{C}+s\mathbf{R}\mathbf{q}_i-\tilde{\mathbf{Q}}_i\right)=\mathbf{0}. \tag{5-7}$$

$$\therefore\ \mathbf{C}=\frac{1}{W}\left(\sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}}-s\mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right)=\frac{1}{W}\begin{pmatrix}\sum_i w_i\tilde{X}_i-s\left(\sum_i w_ix_i\right)\cos\theta+s\left(\sum_i w_iy_i\right)\sin\theta\\ \sum_i w_i\tilde{Y}_i-s\left(\sum_i w_ix_i\right)\sin\theta-s\left(\sum_i w_iy_i\right)\cos\theta\end{pmatrix}. \tag{5-8}$$

次に， f を θ で微分します．式(5-8)の $\mathbf{C}$ を代入し式(3-5)（ $\forall\mathbf{u},\ \left\langle\mathbf{R}\mathbf{u},\mathbf{R}'\mathbf{u}\right\rangle=0$ ）を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\theta}&=\sum_i w_i\varepsilon_i\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\theta}=\sum_i w_i\varepsilon_i\frac{1}{2\varepsilon_i}2s\left(\left\langle\mathbf{C},\mathbf{R}'\mathbf{q}_i\right\rangle-\left\langle\mathbf{R}'\mathbf{q}_i,\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\rangle\right)\\
&=s\left(\left\langle\mathbf{C},\mathbf{R}'\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\rangle-\sum_i w_i\left\langle\mathbf{R}'\mathbf{q}_i,\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\rangle\right)\\
&=s\left(\left\langle\frac{1}{W}\left(\sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}}-s\mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right),\ \mathbf{R}'\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\rangle-\sum_i w_i\left\langle\mathbf{R}'\mathbf{q}_i,\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\rangle\right)\\
&=s\left(\frac{1}{W}\left(\left\langle\sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}},\mathbf{R}'\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\rangle-s\left\langle\mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i,\mathbf{R}'\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\rangle\right)-\sum_i w_i\left\langle\mathbf{R}'\mathbf{q}_i,\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\rangle\right)\\
&=s\left(\frac{1}{W}\left\langle\sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}},\mathbf{R}'\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\rangle-\sum_i w_i\left\langle\mathbf{R}'\mathbf{q}_i,\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\rangle\right)=0.\end{aligned} \tag{5-9}$$

$$\therefore\ \left\langle\sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}},\mathbf{R}'\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\rangle-W\sum_i w_i\left\langle\mathbf{R}'\mathbf{q}_i,\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\rangle=0. \tag{5-10}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\alpha&=W\sum_i w_i\left(x_i\tilde{X}_i+y_i\tilde{Y}_i\right)-\left(\sum_i w_ix_i\right)\left(\sum_i w_i\tilde{X}_i\right)-\left(\sum_i w_iy_i\right)\left(\sum_i w_i\tilde{Y}_i\right),\\
\beta&=W\sum_i w_i\left(x_i\tilde{Y}_i-y_i\tilde{X}_i\right)+\left(\sum_i w_iy_i\right)\left(\sum_i w_i\tilde{X}_i\right)-\left(\sum_i w_ix_i\right)\left(\sum_i w_i\tilde{Y}_i\right)\end{aligned} \tag{5-11}$$

とおけば，式(5-10)は

$$\left\langle\sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}},\mathbf{R}'\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\rangle-W\sum_i w_i\left\langle\mathbf{R}'\mathbf{q}_i,\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\rangle=\alpha\sin\theta-\beta\cos\theta=0 \tag{5-12}$$

と書けます．

続けて，f を s で微分します．式(5-8)の $\mathbf{C}$ を代入し，式(3-2)（$\forall\mathbf{u}, \|\mathbf{Ru}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$）を用いると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= \sum_i w_i\varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial s} = \sum_i w_i\varepsilon_i \frac{1}{2\varepsilon_i} 2\left(\left\langle \mathbf{C}, \mathbf{Rq}_i \right\rangle - \left\langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle + s\|\mathbf{q}_i\|^2\right) \\
&= \left\langle \mathbf{C}, \mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i \right\rangle - \sum_i w_i \left\langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle + s\sum_i w_i\|\mathbf{q}_i\|^2 \\
&= \left\langle \frac{1}{W}\left(\sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}} - s\mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right),\ \mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i \right\rangle - \sum_i w_i \left\langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle + s\sum_i w_i\|\mathbf{q}_i\|^2 \qquad (5\text{-}13) \\
&= \frac{1}{W}\left(\left\langle \sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i \right\rangle - s\left\langle \mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i, \mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i \right\rangle\right) - \sum_i w_i \left\langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle + s\sum_i w_i\|\mathbf{q}_i\|^2 \\
&= \frac{1}{W}\left(\left\langle \sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i \right\rangle - s\left\|\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\|^2\right) - \sum_i w_i \left\langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle + s\sum_i w_i\|\mathbf{q}_i\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad s = \frac{W\sum_i w_i\left\langle \mathbf{Rq}_i, \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\rangle - \left\langle \sum_i w_i\tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{R}\sum_i w_i\mathbf{q}_i \right\rangle}{W\sum_i w_i\|\mathbf{q}_i\|^2 - \left\|\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\|^2}. \qquad (5\text{-}14)$$

ここで，式(5-14)の分母を

$$V = W\sum_i w_i\|\mathbf{q}_i\|^2 - \left\|\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\|^2 = W\sum_i w_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) - \left(\left(\sum_i w_i x_i\right)^2 + \left(\sum_i w_i y_i\right)^2\right) \qquad (5\text{-}15)$$

とおき，式(5-11)の α, β を用いれば，式(5-14)は

$$s = \frac{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}{V} \qquad (5\text{-}16)$$

と書けます．

最後に，式(5-12)と式(5-16)から θ を $-\pi \le \theta < \pi$ の範囲で決定します．２式を連立させて行列を用いて表せば，

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ sV \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}17)$$

と書けます．これを α, β について解けば

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ sV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sV\cos\theta \\ sV\sin\theta \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}18)$$

となります．したがって $(sV)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ですが，これの平方根を得るために V の符号を調べます．まず，

$$V = W\sum_i w_i\|\mathbf{q}_i\|^2 - \left\|\sum_i w_i\mathbf{q}_i\right\|^2 = W^2\left(\sum_i \frac{w_i}{W}\|\mathbf{q}_i\|^2 - \left\|\sum_i \frac{w_i}{W}\mathbf{q}_i\right\|^2\right) \qquad (5\text{-}19)$$

と書き直してみます，すると，$p_i = w_i/W$ とおけば $\sum_i p_i = 1$ となり，式(5-19)最右辺の $(\ )$ 内は $\mathbf{q}_i$ を確率変数，p_i をそれに対する確率関数とみなした時の‘分散’を表していると見ることができます．

したがって，$\boldsymbol{\mu}=\sum_i p_i\mathbf{q}_i$ （‘期待値’）とおくと，この $(\ )$ 内は $\sum_i p_i\|\mathbf{q}_i-\boldsymbol{\mu}\|^2$ となるはずです．実際，

$$\begin{aligned}\sum_i p_i\|\mathbf{q}_i-\boldsymbol{\mu}\|^2 &= \sum_i p_i\langle\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_i\rangle-2\sum_i p_i\langle\mathbf{q}_i,\boldsymbol{\mu}\rangle+\sum_i p_i\langle\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}\rangle\\ &= \sum_i p_i\langle\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_i\rangle-2\left\langle\sum_i p_i\mathbf{q}_i,\boldsymbol{\mu}\right\rangle+\langle\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}\rangle\sum_i p_i\\ &= \sum_i p_i\langle\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_i\rangle-2\langle\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}\rangle+\langle\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}\rangle\\ &= \sum_i p_i\|\mathbf{q}_i\|^2-\|\boldsymbol{\mu}\|^2\end{aligned}\tag{5-20}$$

となり，これは式(5-19)最右辺の $(\ )$ 内になっています．したがって，$V>0$ であることが分かりました．$s>0$ ですから，結局 $(sV)^2=\alpha^2+\beta^2$ の平方根は正の方をとればよく，

$$sV=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\tag{5-21}$$

となります．よって，式(5-18)から

$$\cos\theta=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \sin\theta=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\tag{5-22}$$

となります．これより θ が決まり，また式(5-22)を式(5-16)に代入すれば s が求まります．そして，得られた θ と s を式(5-8)に代入すれば $\mathbf{C}$ が求まります．

6. ミニマックス解

ここでは，点群 S （テンプレート点群）の基準点 $\mathbf{C}$ を固定し，代わりに $\mathbf{C}$ に対する平行移動ベクトル $\mathbf{t}$ を用意します．すると，点群 S の点は $\mathbf{Q}_i=(\mathbf{C}-\mathbf{t})+s\mathbf{R}_\theta\mathbf{q}_i$，$i=1,\cdots,n$ と表すことができて，これは $\mathbf{t},\theta,s$ の関数となります：$\mathbf{Q}_i=\mathbf{Q}_i(\mathbf{t},\theta,s)$．

さて，ミニマックス法は，両点群における各対応点間の距離の最大値を最小化することであるので，

$$\min_{\mathbf{t},\,-\pi\le\theta<\pi,\,s>0}\ \max_{i=1,\cdots,n}\left\|\mathbf{Q}_i(\mathbf{t},\theta,s)-\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\|\tag{6-1}$$

と書き表すことができます．すると，式(6-1)は次のように変形できます[2]．

$$\begin{aligned}&\min_{\mathbf{t},\,-\pi\le\theta<\pi,\,s>0}\ \max_{i=1,\cdots,n}\left\|\mathbf{Q}_i(\mathbf{t},\theta,s)-\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\|\\ =&\min_{\mathbf{t},\,-\pi\le\theta<\pi,\,s>0}\ \max_{i=1,\cdots,n}\left\|(\mathbf{C}-\mathbf{t})+s\mathbf{R}_\theta\mathbf{q}_i-\tilde{\mathbf{Q}}_i\right\|\\ =&\min_{-\pi\le\theta<\pi,\,s>0}\left(\min_{\mathbf{t}}\ \max_{i=1,\cdots,n}\left\|\mathbf{r}_i(\theta,\ s)-\mathbf{t}\right\|\right).\end{aligned}\tag{6-2}$$

ただし，$\mathbf{r}_i(\theta,s)=\mathbf{C}+s\mathbf{R}_\theta\mathbf{q}_i-\tilde{\mathbf{Q}}_i$ とおきました．さらに，式(6-2)最右辺のカッコ内を $f(\theta,s)$，すなわち，

$$f(\theta,s)=\min_{\mathbf{t}}\ \max_{i=1,\cdots,n}\left\|\mathbf{r}_i(\theta,\ s)-\mathbf{t}\right\|\tag{6-3}$$

とおきます．この $f(\theta,s)$ は，θ と s を固定するごとに生成される点群 $\mathbf{r}_i(\theta,s)$，$i=1,\cdots,n$ に対して，$\mathbf{t}$ を中心とする‘最小包含円’であることを意味しています．

以上のことから，この最小化問題は，２変数関数 $f(\theta, s)$（すなわち最小包含円）の最小化に帰着されました．つまり，$f(\theta, s)$ を最小にする解 $(\hat{\theta}, \hat{s})$ がそれぞれ回転角およびスケールの解となり，またこのときの点群 $\mathbf{r}_i(\hat{\theta}, \hat{s}),\ i=1,\cdots,n$ がつくる最小包含円の中心 $\hat{\mathbf{t}}$ が平行移動量の解となります：

$$(\hat{\theta}, \hat{s}) = \underset{-\pi \le \theta < \pi,\ s>0}{\arg\min}\ f(\theta, s), \tag{6-4}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \arg\min_{\mathbf{t}} \max_{i=1,\cdots,n} \left\| \mathbf{r}_i(\hat{\theta},\ \hat{s}) - \mathbf{t} \right\|. \tag{6-5}$$

7. 補足

これまでの結果を標語的に言えば次のようになります.

《最小二乗法》　：二つの点群のそれぞれの重心を合わせた後，対応点の誤差の二乗和が最小となるように，テンプレート点群の回転角および相似比を探す.

《ミニマックス法》：目標点群の各点を中心として，テンプレート点群の対応点が入るように同一半径の円を設ける．テンプレート点群をいろいろに動かしたとき，円の半径が最小となる位置・回転角および相似比を探す.

〈参考文献〉

[1] 徐剛, 辻三郎, “３次元ビジョン”, 共立出版, 1998.
[2] K. Imai, S. Sumino and H. Imai, “Minimax Geometric Fitting of Two Corresponding Sets of Points and Dynamic Furthest Voronoi Diagrams”, IEICE Transactions on Informations and Systems, Vol.E81-D, No.11, pp.1162-1171, 1998.

改訂履歴

Version No.	内　　容
1.0	• 新規発行
1.1	• 表記法の修正

以上